Berlin, W. Fried. Wilh. Str. 14
13. 12. 88

Sehr geehrter Herr Doctor!

Es freut mich, Ihnen mittheilen zu können, daß die Akademie in ihrer heutigen Sitzung Ihnen die gewünschte Summe bewilligt hat. Zugleich ist genehmigt worden, daß die herzustellenden Modelle so lange, als Sie dieselben für Ihre Studien bedürfen, in Ihren Händen bleiben sollen. Daran ist jedoch die Bedingung geknüpft, daß Copien der Modelle nur mit Erlaubniß der Akademie angefertigt und in den Handel gebracht werden dürfen.

Der Beschluß der Akademie bedarf noch der Zustimmung des vorg. Ministeriums. Daß dieselbe erfolge, unterliegt keinem Zweifel; Sie können daher schon jetzt Ihre Vorbereitungen

schaffen und brauchen nicht in
Sorge zu sein, wenn Sie auch
die officielle Benachrichtigung
noch einige Zeit werden warten
müssen.

Mit freundlichstem Gruß

Hochachtungsvoll ergebenst
Weierstraß

DSI

Berlin (W) Potsdamer Str. 40
den 10ten Febr. 76

Verehrter Freund und College!

Die Frage, welche Sie in Ihrem freundlichen Briefe vom 2ten d. M. an mich gerichtet haben, werden Sie durch die beigelegte Notiz – welche ich gelegentlich mir zurückzustellen zu wollen bitte – insofern beantwortet finden, als darin erstens bewiesen wird, dass die Function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x)\pi ,$$

wenn a eine beliebige ganze Zahl, grösser als 1, und b zwischen $\frac{1}{a}$ und 1 enthalten ist, für keinen Werth von x einen bestimmten endlichen Differential-Coefficienten besitzt; ~~dann~~ und zweitens in jedem Intervalle unendlich viele Werthe von x, für die $f(x)$ ein Maximum oder Minimum ist, nachgewiesen werden.

Es gilt dies übrigens auch noch, wenn $b<1$, $ab=1$, ferner auch, wenn a keine ganze Zahl ist, ~~aber~~ unter den Bedingungen

$a > 1, \quad 1 > b \geqq \frac{1}{a}$;

doch ist der Beweis dann etwas weitläufig, und besitze ich keine Aufzeichnung davon. Allgemein auch kann man behaupten, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \cos(a_n x + c_n)\pi ,$$

wo die a_n, b_n positive, die c_n beliebige reelle Constanten bezeichnen, eine nicht differentiirbare Function darstellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: die Reihen

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$$

sind convergent, die Reihe

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots$$

aber divergent.

Ich bemerke noch, dass ich in der von P. Dubois mitgetheilten Notiz die Bedingung

$$ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi$$

deshalb angenommen habe, um ein Beispiel einer Function zu geben, von der sich nachweisen lässt, dass sie an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt. Nähern sich nämlich die Quotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h},$$

wenn h beständig positiv bleibend unendlich klein wird, beide der Grenze $+\infty$, oder beide der Grenze $-\infty$, so kann man sagen, dass $f(x)$ an der Stelle $(x = x_0)$ zwar keinen endlichen, aber doch einen bestimmten Differentialquotienten besitzt. Die von mir a. a. O. angegebene Function ist aber so beschaffen, dass für keine Stelle x_0 jene beiden Quotienten <u>derselben</u> Grenze sich nähern.

Gestatten Sie mir bei dieser Gelegenheit einen Punkt zu berühren, wo ich mich anscheinend nicht in Übereinstimmung mit Ihnen befinde.

Nach der Bemerkung auf S. 13 Ihrer „Vorlesungen" nehmen auch Sie an, dass eine eindeutig definirte und <u>continuirliche</u> Function $f(x)$, wenn sie in einem endlichen Intervalle unendlich viele Maxima und Minima

endlicher Anzahl besitzt, in diesem Intervall überall, mit Ausnahme einzelner Stellen einen bestimmten endlichen Differentialquotienten habe.

Hier kommt es nun zunächst darauf an, dass wir uns darüber verständigen, was unter „einzelnen Stellen" zu verstehen ist. Wenn ich mich daran halte, wie der ausgesprochene Satz bisher von den Mathematikern ausdrücklich oder stillschweigend aufgefasst worden ist, so ist gemeint, dass in jedem Intervalle, in welchem f(x) weder ein Maximum oder Minimum besitzt, eine stetige Folge solcher Werthe von x, die nicht zu den Ausnahmestellen gehören, existiren, womit nicht ausgeschlossen ist, dass die Ausnahmestellen auch in unendlich grosser Anzahl vorhanden sein können.

So verstanden würde der in Rede stehende Satz aber etwas Unrichtiges aussprechen, indem man mit Leichtigkeit

DSI

Functionen definiren kann, welche kein Maximum oder Minimum besitzen, und daß in jedem Intervalle unendlich viele Stellen, in denen sie nicht differentiirbar sind, darbieten. Eine bemerkenswerthe Function dieser Art ist z. B. die folgende.

Es sei

$$\varphi(x) = x\left\{1 + \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\lg(x^2)\right)\right\},$$

so ist $\varphi(x)$ eine Function, welche, wenn x stetig wachsend das Intervall $(-\infty \ldots +\infty)$ durchläuft, ebenfalls stetig wachsend von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht. Dieselbe hat an der Stelle $(x=0)$ keinen bestimmten Differentialquotienten, während an jeder andern ein solcher existirt. Nimmt man nun zwei ~~unendliche~~ Reihen positiver Grössen an, die erste

$a_1, a_2, a_3 \ldots$

ganz willkürlich, die andere

~~b_0~~ $b_1, b_2, b_3 \ldots$

so, daß $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$

einen endlichen Werth hat, und setzt

~~$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}$ [illegible]~~

$$f(x) = b_0\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\left(\varphi(x-a_n)+\varphi(x+a_n)\right),$$

so ist $f(x)$ eine stetige Function, die kein Maximum und kein Minimum besitzt, und an den Stellen

$$0,\ \pm a_1,\ \pm a_2 \ldots$$

keinen bestimmten Differentialquotient hat, indem sich zeigen läßt, daß für jeden bestimmten Werth von n der Quotient

$$\frac{f(\pm a_n + h) - f(\pm a_n)}{h}$$

und ebenso

$$\frac{f(\pm a_n - h) - f(\pm a_n)}{-h}$$

zwischen zwei angebbaren, von h unabhängigen Grenzen schwankt, wie nahe auch h der Null kommen möge.

Man kann nun aber die Reihe der Größen $a_1, a_2 \ldots$ auf mannigfaltige Weise so bestimmen, daß in jedem beliebigen Intervalle unendlich viele derselben liegen. So hat z. B. Cantor gezeigt, daß sich eine solche Reihe bilden läßt, die jede algebraische Zahl, und zwar eine jede nur einmal, enthält.

Es existiren also stetige Functionen von x, welche ohne ein Maximum oder Minimum zu besitzen, keinen Differentialquotienten haben, wenn x einen ~~[illegible]~~ Werth hat, der ~~[illegible]~~ Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist.

Für eine solche Function gilt also der in Rede stehende Satz nicht in dem von mir angenommenen Sinne.

Nun gebe ich zwar gern zu, daß wenn man sich die Gesammtheit aller algebraischen Zahlen als „singuläre Stellen" im Gebiete der reellen Größen auffassen kann, insofern sie durch eine bestimmte

Definition von den übrigen ge-
schieden werden können. Indessen
werden Sie mich mit darin überein-
stimmen, daß auch eine derartige Function,
sowie überhaupt auch jede, welche in
jedem Intervalle Stellen darbietet,
wo sie keinen bestimmten Differential-
quotienten hat, die Lehren der
Differentialrechnung keine Anwendung
finden. Deshalb halte ich es für das
beste, daß man sich nicht in eine Discussion
über die Bedeutung des Ausdrucks
„einzelner Stellen" einzulassen, sondern
unter „differentiirbaren Functionen"
nur eine solche zu verstehen, welche
in jedem Intervalle, für das sie
definirt ist, auch eine stetige
Folge von Stellen mit bestimmten
endlichen Differentialquotienten
darbietet.

Mit freundlichstem Gruße
und der Bitte, mich auch Ihrer lieben Frau
empfehlen zu wollen,

Ihr ergebenster
Weierstrass

DSI

Lieber Herr Doctor!

Herr Dr. Pritzel hat mir versprochen, daß er Ihnen den Zutritt zu dem Zimmer der Bibliothek, wo die Zeitschriften der Akademie stehen, gestatten wolle. Sie werden wohl thun, wenn Sie ihm einen formellen Besuch machen. Für den Fall, daß Sie noch keine Karte für die Benutzung des General-Zimmers haben sollten, lege ich eine Empfehlung an Gh. O. R. Pertz bei, die Sie ihm in der Bibliothek, wo der des Morgens gewöhnlich anwesend ist, übergeben können.

Freundlichst grüßend

B. 30. Apr. 70.

Ihr ergebenster
[illegible]

in den Bezeichnungen Ihrer Abhandlung

$$\vartheta_{23} = \vartheta_{4}$$

sein. Aber

$$4\vartheta_{23}^2 = \vartheta_5^2 + \vartheta_0^2 - \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2$$

$$4\vartheta_{4}^2 = \vartheta_5^2 - \vartheta_0^2 + \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2$$

folglich $\vartheta_0^2 = \vartheta_{12}^2$

$$\left(\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_0}\right)^2 = 1$$

Da nun

$$\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_5} = \sqrt[4]{\left\{\frac{a_0-a_1 \cdot a_1-a_4 \cdot a_2-a_3}{a_0-a_2 \cdot a_1-a_3 \cdot a_2-a_4}\right\}}$$

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_5} = \sqrt[4]{\left\{\frac{a_0-a_1 \cdot a_0-a_3}{a_0-a_2 \cdot a_0-a_4}\right\}} \quad {}^{x)}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{(a_0-a_4)(a_1-a_4)(a_2-a_3)}{(a_0-a_3)(a_1-a_3)(a_2-a_4)} = 1,$$

oder $$(a_1-a_2)(a_0-a_2) = (a_2-a_3)(a_2-a_4)$$

als die algebraische Gleichung, welche der transcendenten $\tau_{12} = \frac{1}{2}\tau_{11}$ entspricht.

In dem von Jacobi behandelten Falle ist $a_0 = \frac{1}{\kappa\lambda}$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0$ $a_3 = -\frac{1}{\kappa}$ $a_4 = -\frac{1}{\lambda}$ die vorstehende Bedingungsgleichung ist also erfüllt.

x) Ich bemerke hierbei, dass in den Formeln Ihres §1. statt $P'(a_{2\alpha})$, $P'(a_{2\alpha-1})$ stehen muss $\frac{P'(a_{2\alpha})}{A_0}$, $\frac{P'(a_{2\alpha-1})}{A_0}$

Mitte kann ich diesen Gegenstand für den Augenblick nicht verfolgen; es wird aber das Vorstehende genügen, um Ihnen die Überzeugung zu geben, dass sich das fragliche Problem auf dem von mir eingeschlagenen Wege überhaupt angreifen lässt, und dass es jedenfalls mit der allgemeinen Transformations-Theorie der Abel'schen Transcendenten auf das innigste zusammenhängt. Eine tiefere Begründung der letztern wird also wohl nothwendig vorausgehn müssen.

Mit freundlichstem Gruße

Berlin den 22sten Oktober 1864

Ihr ergebenster
Weierstraß

DSI

Geehrter Freund!

Ich habe nach Ihrer Abreise die Untersuchung, unter welcher Bedingungen ein Integral von der Form

$$\int \frac{A + Bx}{\sqrt{Rx}}\, dx,$$

(wo $Rx = A_0(x-a_0)\dots(x-a_n)$) ~~auf~~ auf ein elliptisches zurückführbar ist, wieder aufgenommen, und theile Ihnen, da Sie sich für den Gegenstand interessiren, das Resultat mit.

Eine ϑ-Function mit den Argumenten v_1, v_2 und den Modulen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ wird auf die allgemeinste Weise in eine andere mit den Argumenten v'_1, v'_2 und den Modulen $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$ folgendermaßen transformirt:

Es sei

$$w_{11} = \alpha_1 + \alpha_3\tau_{11} + \alpha_4\tau_{12}$$
$$w'_{11} = \beta_1 + \beta_3\tau_{11} + \beta_4\tau_{12}$$
$$w_{12} = \gamma_1 + \gamma_3\tau_{11} + \gamma_4\tau_{12}$$
$$w'_{12} = \delta_1 + \delta_3\tau_{11} + \delta_4\tau_{12}$$

$$w_{21} = \alpha_2 + \alpha_3\tau_{21} + \alpha_4\tau_{22}$$
$$w'_{21} = \beta_2 + \beta_3\tau_{21} + \beta_4\tau_{22}$$
$$w_{22} = \gamma_2 + \gamma_3\tau_{21} + \gamma_4\tau_{22}$$
$$w'_{22} = \delta_2 + \delta_3\tau_{21} + \delta_4\tau_{22}$$

wo α_1, α_2 etc. ganze Zahlen bedeuten, die den vorstehenden Bedingungsgleichungen, in denen n eine ganze positive Zahl bezeichnet, genügen müssen:

$$\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2 = n$$
$$\alpha_1\gamma_3 + \alpha_2\gamma_4 - \alpha_3\gamma_1 - \alpha_4\gamma_2 = 0$$
$$\beta_1\gamma_3 + \beta_2\gamma_4 - \beta_3\gamma_1 - \beta_4\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_1\delta_3 + \alpha_2\delta_4 - \alpha_3\delta_1 - \alpha_4\delta_2 = 0$$
$$\beta_1\delta_3 + \beta_2\delta_4 - \beta_3\delta_1 - \beta_4\delta_2 = 0$$
$$\gamma_1\delta_3 + \gamma_2\delta_4 - \gamma_3\delta_1 - \gamma_4\delta_2 = n$$

Dann ist

$$v'_1 = n\frac{w_{22}v_1 - w_{12}v_2}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}} \qquad v'_2 = n\frac{w_{11}v_2 - w_{21}v_1}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}}$$

$$\tau'_{11} = \frac{w_{22}w'_{11} - w_{12}w'_{21}}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}}$$

$$\tau'_{12} = \tau'_{21} = \frac{w_{11}w'_{21} - w_{21}w'_{11}}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}} = \frac{w_{22}w'_{12} - w_{12}w'_{22}}{w_{11}w_{12} - w_{12}w_{21}}$$

$$\tau'_{22} = \frac{w_{11}w'_{22} - w_{21}w'_{12}}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}}$$

Wenn nun die Gleichung

$$\frac{w'_{11}}{w_{11}} = \frac{w'_{21}}{w_{21}}$$

besteht, so wird $\tau'_{12} = 0$, und es ist

demgemäß jede der Functionen

$$\vartheta(v'_1, v'_2 \mid \tau'_{11}\ \tau'_{12}\ \tau'_{22})$$

das Product zweier elliptischen ϑ, und es können dann die Constanten A, B (auf zweierlei Art) so bestimmt werden, daß

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{\sqrt{Rx}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R\xi}}$$

wird, wo $R\xi$ vom dritten Grade, und $\xi, \sqrt{R\xi}$ rational durch $x, \sqrt{Rx}$ ausdrückbar sind.

Umgekehrt muß zwischen den Größen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ eine Gleichung von der angegebenen Form stattfinden, wenn sich das Integral $\int \frac{A + Bx}{\sqrt{Rx}}\,dx$ in der in Rede stehenden Weise ~~auf~~ in ein selbsttransformirtes elliptisches ~~[illegible]~~ Jacobi-Preis lassen. {Nach einem Abel'schen Satz – §. 1 Theor. II genügt es aber Transformationen dieser Art zu betrachten}

Die Bedingung $\tau'_{12} = 0$ hat ~~[illegible]~~ zur Folge, daß

$$\vartheta(0,0 \mid \tau'_{11}\ \tau'_{12}\ \tau'_{22})_{14} = 0$$

Man kann aber

$$\frac{\vartheta(0,0 \mid \tau'_{11}\ \tau'_{12}\ \tau'_{22})_{14}}{\vartheta(0,0 \mid \tau'_{11}\ \tau'_{12}\ \tau'_{22})_5}$$

algebraisch durch die Größen

$$\frac{\vartheta(0,0 \mid \tau_{11}\ \tau_{12}\ \tau_{22})_\lambda}{\vartheta(0,0 \mid \tau_{11}\ \tau_{12}\ \tau_{22})_5}$$ (wo $\lambda = 0,1,2,3,4$, 01 etc.)

auszudrücken und so die algebraische Gleichung unter den Größen $a_0 \ldots a_4$ erhalten, welche der transcendenten $\tau'_{12}=0$ entspricht.

Beispielsweise sei

$$w_{11}=2 \qquad w_{21}=1$$
$$w'_{11}=\tau_{11} \qquad w'_{21}=\tau_{21}$$
$$w_{12}=0 \qquad w_{22}=1$$
$$w'_{12}=-\tau_{11}+2\tau_{12} \qquad w'_{22}=-\tau_{21}+2\tau_{22}$$

dann sind die obigen Bedingungen erfüllt, und man erhält: $n=2$,

$$v'_1=v_1 \qquad v'_2=2v_2-v_1$$

$$\tau'_{11}=\tfrac{1}{2}\tau_{11}\;,\quad \tau'_{12}=\tau_{12}-\tfrac{1}{2}\tau_{11}\;,\quad \tau'_{22}=2\tau_{22}-2\tau_{12}+\tfrac{1}{2}\tau_{11}$$

Nun findet sich zunächst

$$\vartheta(v'_1, v'_2 \mid \tau'_{11}\;\tau'_{12}\;\tau'_{22})_{14} = -\vartheta(v_1, 2v_2 \mid \tfrac{1}{2}\tau_{11}\;\tau_{12}\;2\tau_{22})_{03}$$

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man in der Reihe für die erste Function statt der Summationsbuchstaben ν_1, ν_2 beziehlich

$$\nu_1+\nu_2\;,\;\nu_2$$

setzt. Sondert man dann in der Reihe für die zweite Function (03) die Glieder mit ungeraden ν_1 von denen mit geraden, so ~~ergiebt~~ erhält man

$$\vartheta(v'_1, v'_2 \mid \tau'_{11}\;\tau'_{12}\;\tau'_{22})_{14} = \vartheta(2v_1, 2v_2 \mid 2\tau_{11}\;2\tau_{12}\;2\tau_{22})_{23}$$
$$-\;\vartheta(2v_1, 2v_2 \mid 2\tau_{11}\;2\tau_{12}\;2\tau_{22})_{4}$$

Nimmt man jetzt

$$\tau_{12}=\tfrac{1}{2}\tau_{11}$$

an, so wird $\tau'_{12}=0$, und es muß also-

Herr stud. phil. Matthias Lerch aus Milinov (Böhmen)
hat im vergangenen Wintersemester und im
laufenden Sommersemester zwei Vorlesungen –
Elemente der allgemeinen Functionenlehre und
Theorie der elliptischen Functionen – bei
mir gehört, und habe ich mich durch
eine eingehende Prüfung überzeugt, dass
er das Vorgetragene nicht nur wohl verstanden, sondern auch durch gründliches
Selbststudium sich zu eigen zu machen
mit recht gutem Erfolge bemüht gewesen
ist; was ich ihm auf sein Begehren
hiermit bezeuge.

Berlin, 20 Juli 1885

Prof. Weierstraß

Vidi

Foerster.

L.S.

C. 3.

C.

Zeugniss des Herrn Prof. Weierstrass
(im Orig.)

DSI

AUTOGRAPHE

de

Weierstrass

Karl

OBSERVATIONS

1) L.a.s. o.O. 30.IV.1870 1p. 8° Wegen Benützung der Zeitschriften der Bibliothek d. Akademie der Wissenschaften.

2) ./Doc.a.s. 1 p.fol., Berlin, 20. Juli 1885, Studienzeugnis für Mathias Lerch, über die bei W. gehörten Vorlesungen über Elemente der allgemeinen Funktionenlehre und Theorie der elliptischen Funktionen. Mitunterzeichnet vom Astronomen W. Förster. /Aus dem Nachlass von Prof.Lerch/

3) ./L.a.s. 8 p.8°, Berlin, 10.2. 1876, ausführliches wissenschaftl. Schreiben über die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x)\pi$$

und deren Differentialquotienten.

4) L.a.s. 6 p.8°, Berlin, 22.10. 1864. Wissenschaftl.Schreiben, beinhaltet die Untersuchung, unter welchen Bedingungen ein Integral von der Form

$$\int \frac{A + Bx}{\sqrt{R\,x}}\, dx \;;$$

für

$$R\acute{x} = A_\nu (x - a_0) \;\ldots\; (x - au)$$

auf ein elliptisches zurückführbar ist.

Weierstraß, Karl, Mathematiker, geb. 31. Okt. 1815 zu Ostenfelde in Westfalen, gest. 19. Febr. 1897 in Berlin, studierte seit 1834 in Bonn die Rechte und Cameralia, seit 1838 in Münster Mathematik, war dann Gymnasiallehrer in Münster, Deutsch-Krone und von 1848 an zu Braunsberg in Ostpreußen, wurde 1856 Lehrer am Gewerbeinstitut in Berlin und 1864 ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität. Seine Arbeiten bewegen sich hauptsächlich auf dem Gebiete der Funktionentheorie, die er von Grund auf mit einer vor ihm nicht erreichten Strenge neu aufgebaut hat; dabei ging er rein analytisch zu Werke, indem er die Lehre von den Potenzreihen und der sogen. analytischen Fortsetzung dieser Reihen entwickelte und hierauf seinen Funktionsbegriff gründete. Lange Zeit boten seine von zahlreichen Schülern besuchten Vorlesungen und die in Abschriften verbreiteten Ausarbeitungen dieser Vorlesungen die einzige Gelegenheit, seine funktionentheoretischen Untersuchungen kennen zu lernen, und erst in neuerer Zeit sind von andrer Seite Darstellungen dieser Theorien veröffentlicht worden, während eine authentische, von W. selbst anerkannte Darstellung gerade der Anfangsgründe seiner Funktionentheorie fehlt. Einige seiner »Abhandlungen aus der Funktionenlehre« hat W. selbst herausgegeben (Berl. 1886); eine Gesamtausgabe seiner Werke, in die wenigstens ein Teil seiner Vorlesungen aufgenommen werden soll, veranstaltet die Akademie der Wissenschaften in Berlin (Bd. 1—4, Berl. 1894—1903). Vgl. Dantscher, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen (Leipz. 1908).